数理解析研究所講究録
424巻 1981年 22-36

Modular 表現論の現状と問題

大阪市大 理 津島行男

有限群の表現論，特にmodular表現に関しては昔から興味ある問題があるが，重要と思われるものの大部分は未解決である。限られた時間内ではそれらの意味づけ，現状報告にふれる事はできなかったが，幸いにしてFeitの報告(Santa Cruz 1979)に詳しいので御参照していただく事にして，ここでは最近めざましい活躍をしているM. Broué, L. Puigによるmodular表現の再構成にスポットを当てて現状報告の代わりにさせていただきます。これはBrouéのイリノイ大学における講義(1980，4月〜6月)を基にしたものですが，いずれSpringerのLecture notes seriesより刊行されるとの事，そのための案内役となれれば幸いです。

I. Broué－Puigの方法

§1. Brauer homomorphism for G-algebras

この章ではいわゆるG－algebraに対しBrauer homo.を

定義し，Brauerの第1主定理とGreen対応の理論が同じアイデアから出てくる事を示す。記号は以下の通りである。

$(\mathcal{O}, \mathfrak{m})$: complete valuation ring of rank one，標数 0

$F = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ は標数 $p > 0$

$R = \mathcal{O}$ 又は F

A ; 有限生成 R-algebra，$pi(A) =$ Aの原始巾等元の集合

以下のLemmaは既知であるが便宜上まとめておく。

[1.1] (Lifting idempotent Theorem)　IをAの両側イデアルでJacobson radicalに入るとする。$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$を$\bar{A} = A/I$の直交巾等元とすれば$A$の直交巾等元$e_1, e_2, \cdots, e_r$があって$\bar{e}_i = \varepsilon_i$　$1 \leq {}^{\forall}i \leq r$とできる。

これの直接の系として

[1.2] IをAの両側イデアル。$A \longrightarrow A/I$によって $\{I$に入らない$pi(A)$の同型類$\} \xleftrightarrow{1:1} \{pi(\bar{A})$の同型類$\}$がinduceされる。(但 $e, f \in pi(A)$　eとfが同型$\Leftrightarrow Ae \simeq Af$ $(\Leftrightarrow eA \simeq fA)$

[1.3] (Rosenberg's Lemma)　$e \in pi(A)$，$I_1, \cdots, I_k$をAの左イデアル。このとき $e \in \sum_{j=1}^{k} I_j \Rightarrow e \in I_j e$　$1 \leq {}^{\exists}j \leq k$

[1.4] $e \in pi(A)$，$f \in pi(A)$ s.t. $f \in AeA$

$\Leftrightarrow$ $Ae \simeq Af$ $(\Leftrightarrow e = ab,\ f = ba$　${}^{\exists}a, b \in A)$

[1.5] A : 任意の環　M : left A-mod.　$E = \mathrm{End}_A(M)$

e, fをEの巾等元とするとき，

$eM \simeq fM$ as A-modules $\Longleftrightarrow$ $Ee \simeq Ef$ as E-modules

証明は [1.1] を除き易しい。

Def. A が(右) RG-module のとき A を G-algebra とよぶ。

(Gの作用は右肩につけて書くことにする) Gは有限群。

$$A^G = \{ a \in A \mid a^g = a \quad \forall g \in G \}$$

$G \supset P$ を subgroup とした時 ~~[illegible]~~

$Tr_P^G : A^P \longrightarrow A^G$ を $Tr_P^G(a) = \sum_{g \in G/H} a^g$ で define し

$A_P^G = Tr_P^G(A^P)$ とかく。次の Lemmas は容易

[1.6] 1) $G \supset H \supset P \Rightarrow Tr_P^G = Tr_H^G \cdot Tr_P^H$

2) (Mackey 分解) $G \supset P, H$

$$Tr_P^G(a) = \sum_{s \in P\backslash G/H} Tr^H_{H \cap s^{-1}Ps}(a^s)$$

3) $G \supset P, H$ のとき $Tr_P^G(a) Tr_H^G(b) = \sum_{s \in P\backslash G/H} Tr^H_{H \cap s^{-1}Ps}(a^s b)$

Def. P を G の p-subgroup (pは $F = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ の標数!)

$I^P(A) = \sum_{Q < P} A_Q^P + \mathfrak{m} A^P$ は A^P のイデアルで

且 $N_G(P)$ — invariant. natural map (当然 $N_G(P)$-alg. homo.)

$$A^P \longrightarrow A(P) = A^P / I^P(A)$$

を Brauer homo. とよび Br_P とかく。

[1.6] 2) より次の基本的関係式を得る。

[1.7] $Br_P Tr_P^G = Tr_P^{N_G(P)} Br_P \quad (\text{on } A^P)$

Example 1. $G \xrightarrow{act.} X$: finite group. $A = F[X]$

このとき $A^P = F C_X(P) \oplus \sum_{Q<P} A_Q^P$

よって $Br_P : (FX)^P \longrightarrow F C_X(P)$ は $C_X(P)$ による "cut" に他ならない。$X = G$ の場合は従って古典的な Brauer homo. となるが定義域は広がっており、その分 map は epimorphism になっている。次の主張の前半は古典的、即ち G-algebra における defect group の理論である。証明は Rosenberg's Lemma と [1.6] 3) より直ちにできる。

[1.8] (Min-Max Theorem) $e \in pi(A^G)$ に対し

$^\exists D$: p-subgroup of G unique up to G-conjugacy s.t.

(i) $e \in A_D^G$ (ii) $e \in A_H^G \Longrightarrow D \underset{G}{\leq} H$

D を e の defect group とよび $D = D(e)$ とかく。この時

(iii) $Br_D(e) \neq 0$ 且 $Br_P(e) \neq 0 \Rightarrow P \underset{G}{\leq} D$

Proof. (iii) のみが問題である。$Br_D(e) = 0$ とする。

従って $e \in \sum_{Q<D} A_Q^D$ 一方仮定より $e = Tr_D^G(a)$, $^\exists a \in A^D$

$\therefore e = Tr_D^G(ea) \in Tr_D^G(\sum_{Q<D} A_Q^D) = \sum_{Q<D} Tr_Q^G(A_Q)$

$\therefore e \in Tr_Q^G A^Q$ for some $Q < D$ by Rosenberg's Lemma.

矛盾。$\therefore Br_D(e) \neq 0$. 次に $Br_P(e) \neq 0$ とする。

$e \in A_D^G \subset \sum A^P_{P \cap {}^{g}D}$. よって最後のイデアルは $I^P(A)$

に入らない。 $\therefore P \cap s^{-1}Ds = P \quad {}^{\exists}s \in G$ i.e. $P \underset{G}{\leq} D$

Def. $I(A, G, P)$ = isomorphism classes of $\mathrm{pi}(A^G)$ with defect group P (これは well defined. 即ち $e, f \in \mathrm{pi}(A^G)$ 且 $A^G e \simeq A^G f$ ならば $D(e) = D(f)$ 例えば [1.4])

[1.9] (1) Br_P induces $I(A, G, P) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} I(A(P), N_G(P), P)$

(2) $N_G(P) \subset H \subset G$ とする。"$A^G \subset A^H$" induces

$I(A, G, P) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} I(A, H, P)$

Proof. やや雑な書き方であるがアイデアは以下の通り。

$$A^G \supset A_P^G \xrightarrow{Br_P} A(P)_P^{N_G(P)} \subset A(P)^{N_G(P)}$$

は epimorphic by [1.7].

所で $I(A, G, P) = \{ e \in \mathrm{pi}(A_P^G) \mid Br_P(e) \neq 0 \}$ 又

$I(A(P), N_G(P), P) = \{ f \in \mathrm{pi}(A(P)_P^{N_G(P)}) \}$ (since $P > Q$ $\Rightarrow A(P)_Q^{N_G(P)} = 0$) これと [1.2] より (1) は自明。

次に $e \in \mathrm{pi}(A^G)$, $D(e) = P$ とする。e を A^H において直交原始巾等元分解をする。$e = \sum e_i$. このとき [1.8] (iii) と同じ方法で $D(e_i) \underset{G}{\leq} P \quad {}^{\forall}i$, 且 $D(e_j) \underset{H}{=} P \quad {}^{\exists}j$ である事が示される。(従って $Br_P(e_j) \neq 0$) 一方 $Br_P(e) = \sum Br_P(e_i)$ は $A(P)^{N_G(P)} = A(P)^{N_H(P)}$ で原始的. よって $Br_P(e) = Br_P(e_j)$ 即ち $D(e_j) \underset{H}{=} P$ となる e_j は唯一つでこのとき $Br_P(e) = Br_P(e_j)$.

(1) と合わせて"制限写像" $e \longrightarrow e_j$ は $I(A, G, P)$ と $I(A, H, P)$ との間の 1 : 1 対応を与える。

[1.9] の系を述べる。

[1.10] (i) Brauer's First Main Theorem. これは [1.9] (1) で $A = FG$ とすればよい

(ii) (Green 対応) $N_G(P) \subset H \subset G$, M : indecomposable RG-module $P = vx(M)$: vertex of M とする。このとき $\exists_1$ $f(M)$: indecomposable RH-module s.t. $M_H \oplus\!\!> f(M)$, $vx(f(M)) = P$

これは $A = \mathrm{End}_R(M)$ として [1.9] (2) より出る。$pi(A) = \{1\}$ であるが $vx(M) = D(1) = P$ である。

(iii) (Green) 記号は上と同じ。δ : block idempotent of RG 且 $\delta M = M$ とする。このとき $P = vx(M) \leq D(\delta)$

Proof. $A = \mathrm{End}_R(M)$ とし, $\rho : RG \longrightarrow A$ を自然な写像.

$\rho\left(\sum_{Q<P} (RG)_Q^P\right) \subset \sum_{Q<P} A_Q^P$ であるから左の図形を可換にする ρ_P が存在する。

$$\begin{array}{ccc} (RG)^P & \xrightarrow{\rho} & A^P \\ {\scriptstyle Br_P^G = Br_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Br_P^A = Br_P} \\ FC_G(P) & \xrightarrow{\rho_P} & A(P) \end{array}$$

$Br_P^A \rho(\delta) = Br_P^A(1_M) \neq 0$. $\therefore$ $Br_P^G \delta \neq 0$, i.e. $P \leq D(\delta)$

(iv) (Nagao) 記号,及び仮定は (ii) (iii) と同じとし, $H = N_G(P)$ とする。このとき $(Br_P \delta) f(M) = f(M)$ (但し $R = \mathcal{O}$ の時 $Br_P \delta$ を $\mathcal{O}$-係数に lift したものを同じ記号で書く)

Proof. (iii) の証明と同じ記号を使う。$\rho(\delta) = 1_M = \sum e_i$ を原始巾等元分解 in $A^{N_G(P)} = \mathrm{End}_{N_G(P)}(M)$. $\exists_1$ $e_i = e$ s.t. $D(e) = P$ in $N_G(P)$. このとき $f(M) = eM$ by definition.

$Br_p^G \delta \in FC_G(p) \subset (FG)^p$ に注意して $\rho(Br_p^G \delta)e \neq 0$ を示せばよい。これは iii) の証明で用いた可換図形より出る。

§2. Corestriction of algebras

記号は §1. と同じである。$G \triangleright H$, M を RH-module

1) (Clifford, Conlon) M が absolutely irreducible とする。(従って $R = F$ or L) $\Longrightarrow$ $\mathrm{End}_{RG}(M^G)$ は twisted group ring $R[I/H, \alpha]$ と同型。ここで I は M の inertial group で α は $H^2(I/H, R^*)$ の元。

2) (Green) G/H を p-group とする。このとき M が absolutely indecomposable なら M^G もそうである。i.e. $\mathrm{End}_{RH}(M)/J \simeq F$ ならば $\mathrm{End}_{RG}(M^G)/J \simeq F$ (J は Jacobson radical)

$\mathrm{End}_{RG}(M)$ は G-algebra $\mathrm{End}_R(M)$ の G-invariants の集合であるが Broué − Puig はこの計算を工夫することによって上記 1) 2) が同じ原理から導びかれることを示し, 同時に 2) に弱干の拡張を与えた。以下その概略を説明する。

Def. A : R-algebra, $\rho : RG \longrightarrow A$ R-alg. homo. が与えられたとき A を interior G-algebra とよぶ。(もちろん $g \in A$, $a \in A$ に対し $a^g = \rho(g)^{-1} a \rho(g)$ とおくことによって A は G-algebra である。) (A, ρ), (A', ρ') が共に interior G-algebra の時 $\alpha : A \to A'$ が interior G-algebra homo. であるとは α が R-alg. homo. であって且 $\rho' = \alpha\rho$

をみたすものをいう。

Example 2. M : RG-module. $E(M) = \mathrm{End}_R M$ とすれば自然な写像 $\rho : RG \longrightarrow E(M)$ によって $E(M)$ は interior G-algebra

M' を RG-module として $E(M) \simeq E(M')$ as interior G-algebra $\Longleftrightarrow$ $M \simeq M'$ as RG-modules.

Def. $G \supset H$, (B, ρ): interior H-algebra このとき double tensor $RG \otimes_H B \otimes_H RG \overset{\text{put}}{=\!=} \mathrm{Cores}_H^G B$ に次のように積を define する。

$$(g \otimes y \otimes h^{-1})(g' \otimes y' \otimes h'^{-1}) = \begin{cases} 0 & \text{if } h^{-1}g' \notin H \\ g \otimes y\rho(h^{-1}g')y' \otimes h'^{-1} & \text{if } h^{-1}g' \in H \end{cases}$$

但し $g, g', h, h' \in G$, $y, y' \in B$.

これによって $\mathrm{Cores}_H^G B$ は R-algebra となり、さらに $\rho_H^G : RG \longrightarrow \mathrm{Cores}_H^G B$ を $\rho_H^G(x) = \sum_{g \in G/H} xg \otimes 1 \otimes g^{-1}$ とすることによって ρ_H^G は R-alg. homo. i.e. $\mathrm{Cores}_H^G B$ は interior G-algebra となる。基本的な性質をいくつか述べる。

[2.1] (i) $1 = \text{単位元} = \sum_{g \in G/H} g \otimes 1 \otimes g^{-1}$

(ii) $\rho_H^G(a)(g \otimes y \otimes h^{-1}) = ag \otimes y \otimes h^{-1}$ $\quad {}^\forall a \in RG$

$(g \otimes y \otimes h^{-1})\rho_H^G(a) = g \otimes y \otimes h^{-1}a$

とくに G-algebra としての作用は

(iii) $(g\otimes y\otimes h^{-1})^{a} = a^{-1}g\otimes y\otimes h^{-1}a \qquad \forall a\in G$

coset 分解 $G=\bigcup gH$ を fix し $e_{g,h}=g\otimes 1\otimes h^{-1}$ とおく。
これらはいわゆる行列単位となる。即ち

$$e_{g,h}\,e_{g',h'}=\delta_{h,g'}\,e_{g,h'} \quad 且 \quad 1=\sum e_{g,g}$$

とくに

(iv) $\mathrm{Cores}_H^G B \cong M(n,B)$ full matrix ring over B of degree $n=[G:H]$

次の例によって cores の背景を知ることができる。

Example 3. Example 2 の記号の下

$$\mathrm{Cores}_H^G E(M) \cong \mathrm{End}_R M^G \text{ as interior } G\text{-algebras}$$

以下 $G\triangleright H$ とし (B,ρ) を interior H-algebra.
$\forall g\in G$ に対し $B^{(g)}=\{b\in B;\ \rho(h)\,b\,\rho((h^{-1})^g)=b,\ \forall h\in H\}$
$B^{(g)}$ が B の unit を含むとき B を g-invariant という。

[2.2] (i) $B^{(1)}=B^H$, $B^{(g)}B^{(g')}\subset B^{(gg')} \quad \forall g,g'\in G$

(ii) $B^{(gh)}=B^{(g)}\rho(h) \quad \forall g\in G,\ h\in H$

(iii) $B^{(g)}\ni \exists u$: unit of B $\Rightarrow u^{-1}\in B^{(g^{-1})}$ 且 $B^{(g)}B^{(g')}=B^{(gg')}$, $\forall g'\in G$

これより特に $G_B=\{g\in G;\ B$ は g-inv.$\}$ は G の subgroup
これを B の inertial group. 上のいずれも証明は容易。

Example 4. M : RH-mod. $B=\mathrm{End}_R M$

B が g-inv. $\Leftrightarrow M\simeq g\otimes_H M$ as RH-mod.

次に $A=\mathrm{cores}_H^G B$ の G-invariants A^G を調べる。

$g \in G$ に対し $A_g = \sum_{x \in G} x \otimes B \otimes g^{-1}x^{-1} = \sum_{\substack{x,y \in G \\ yx = g^{-1}}} x \otimes B \otimes y$ ~~等~~

は gH のみで決まり 又 G による共役で不変であり

$$A = \oplus \sum_{g \in G/H} A_g \text{ , 従って } A^G = \oplus \sum_{g \in G/H} (A_g)^G$$

[2.3] (i) $1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1}$ は(元ごとに) H-inv.

(ii) $A_g^G = Tr_H^G (1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1})$ (= depends only on gH)

(iii) $Tr_H^G (1 \otimes u \otimes g^{-1}) Tr_H^G (1 \otimes u' \otimes g'^{-1}) = Tr_H^G (1 \otimes uu' \otimes (gg')^{-1})$

$\forall u \in B^{(g)}$, $u' \in B^{(g')}$

Proof (i), (ii) は容易。(iii) は [1.6] を用いてできるが、直接示すと次のようになる。$G = \bigcup_{x \in S} Hx = \bigcup_{y \in T} Hy$, 但し S は任意の代表系で $T = \{xg\}_{x \in S}$

$$Tr_H^G (1 \otimes u \otimes g^{-1}) = \sum_{x \in S} x \otimes u \otimes g^{-1}x^{-1}$$

$$Tr_H^G (1 \otimes u' \otimes g'^{-1}) = \sum_{y \in T} y \otimes u' \otimes g'^{-1}y^{-1}$$

$(x \otimes u \otimes g^{-1}x^{-1})(y \otimes u' \otimes g'^{-1}y^{-1})$ が(自明な形で)消えないのは $g^{-1}x^{-1}y \in H$ の場合 $\therefore y = xg$ この時 上の積は $x \otimes uu' \otimes g'^{-1}g^{-1}x^{-1}$ となる。 Q.E.D.

上の事より A^G における積が明確となった。とくに $A_1^G = B^H$ と同一視してよい。A_g^G が gH のみで決まることを強調して $A_g^G = A_{\bar{g}}^G$ とかくことにする。しばらく $G = G_B$ と仮定する。

[2.4] $G = G_B$ とする。

(i) $A^G_{\bar g} A^G_{\bar g^{-1}} = A^G_1 = B^H \quad \forall g \in G$

(ii) $A^G_{\bar g} = B^H u_{\bar g} = u_{\bar g} B^H \quad \exists u_{\bar g} \in A^G_{\bar g}$ (unit)

(実際 $a \in A^G_{\bar g} \Rightarrow a = (a u_{\bar g}^{-1}) u_{\bar g} \in B^H u_{\bar g}$)

(iii) $A^G J(B^H) = J(B^H) A^G$ となり $J(A^G)$ に入る両側イデアル ($J(*)$は$*$の radical)

ここで体上の crossed product の理論と結びつけるため次の仮定をおく。

[2.5] (仮定) $B^H/J(B^H) = F_B$ は可換体($\supset F$)

$\bar g \in \bar G$ に対し $u_{\bar g}$ による conjugation を対応させることにより

$$\sigma : \bar G \longrightarrow Aut(F_B/F)$$ を得る。

以上から

[2.6] $G = G_B$ 及び 仮定[2.5] の下

$$\Lambda = A^G/J(B^H)A^G = \bigoplus\sum_{\bar g \in \bar G} u_{\bar g} F_B \quad \text{with}$$

(i) $u_{\bar g} u_{\bar g'} = u_{\bar g \bar g'}\, \alpha(\bar g, \bar g') \quad \exists \alpha(\bar g, \bar g') \in F_B^*$

(ii) $b\, u_{\bar g} = u_{\bar g}\, b^{\sigma(\bar g)} \quad \forall b \in F_B$

実際上の問題としては，σ 又は α のいずれかが消えてくれるのが有難いわけであるが，$F_B = F$ なら $\sigma = 1$. これが初めに述べた Clifford, Conlon の結果に対応している。

$\alpha \sim 1$ を保証するものとして

[2.7] $G = G_B$, G/H : p-group, F_B : 完全体 とする。

$\Rightarrow$ $\Lambda/J(\Lambda) \cong \mathrm{End}_{F_1} F_B$ 　　ここで $F_1 = F_B^G$

Proof. 仮定からよく知られているように $\alpha \sim 1$ in $H^2(G/H, F_B^*)$

よって初めから $\alpha = 1$ としてよい。 $L = \ker\sigma$ とし I を Λ の

F_B-subspace で $\{u_{\bar{g}} - 1 \mid \bar{g} \in L\}$ で生成されたものとする。$\bar{G} \rhd L$

より $\Lambda I = I\Lambda$ 且巾零。($F_B L$ は F_B 上の group ring. $I = J(F_B L)$)

$$\Lambda/I\Lambda = \oplus\sum_{\bar{g}\in\bar{G}/L} u_{\bar{g}} F_B \quad (\text{crossed product}) \text{ で } \bar{G}/L = \mathrm{Gal}(F_B/F_1)$$

であるからよく知られているように $\Lambda/I\Lambda \cong \mathrm{End}_{F_1} F_B$. Q.E.D.

$G > G_B$ の場合を考える。 $A^G = \oplus\sum u_{\bar{g}} B^H = \sum_{g\in G_B} u_{\bar{g}} B^H \oplus M$ (その他)

所で g を fix する限り $g \in G_B$ ならば

$$A^G_{\bar{g}} = \mathrm{Tr}^G_H(1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1}) \cong B^{(g)} \cong \mathrm{Tr}^{G_B}_H(1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1}) = A^{G_B}_{\bar{g}}$$

よって $A^G = A^{G_B} \oplus M$ と書いてよい。

[2.8] 仮定 [2.5] の下 　$A^G = A^{G_B} + J(A^G)$

Proof. 初めから $R = F$ としてよい。よって $A^G M A^G$ が巾零

となることを言えばよい。 B^H が local である事より

$\mathrm{Tr}^G_H(1 \otimes B^{(g)} \otimes g^{-1})$ は nilpotent (if $g \notin G_B$) である事が

[2.2], [2.3] を用いて示される。これより $A^G M A^G$ の F-basis が

nilpotent であることがわかる。

以上から

〔2.9〕 $G \rhd H$, G/H : p-group B を interior H-algebra

$B^H/J(B^H) = F_B$ は完全体とする。 $A = \mathrm{Cores}_H^G B$ とすれば

$A^G/J(A^G) \cong \mathrm{End}_{F_1} F_B$, $F_B \supset {}^\exists F_1 \supset F$

直接の系として

[2.10] (Green) $G \rhd H$, G/H : p-group M を indecomposable

RH-mod. とし $\mathrm{End}_{RH} M/J$ は完全体とする

$\Longrightarrow$ M^G は同型な直既約加群の直和

Cores 概念の応用としては例えば Puig による p-可解群の場合の nilpotent block の特徴づけがある (Santa Cruz 1979)

尚 Green の定理で G/H が p-group というのは一般論として過大ではない。むしろ必要条件に近いものでさえある。即ち古くから知られている事であるが

[2.11] (Tuker 1963) F : 代数的閉体 $G \rhd H$, $\mathrm{ch}\, F = p > 0$

M : irreducible FH-mod. I を M の inertial group

このとき M^G が indecomposable $\Longrightarrow$ I/H は p-group

証明にはこの章の初めに上げた Clifford, Conlon 当りの結果を使えばよい。

§3. Sylow theory for blocks

Alperin-Broué によるモジュラー表現への Sylow theory

の導入，及びその応用としての Broué − Puig による一般指標のある構成法が中心となるが，共に論文の形で発表されているので解説は避け筆者にとって若干気になっている事を一寸書かせていただきます。

$G \supset P$: p-subgroup，e を $FC_G(P)$ の block (idempotent) とするとき (P, e) を Brauer pair とよぶ

Def. 2つの Brauer pair (Q, f), (P, e) が $(Q, f) \subset (P, e)$ とは ① $Q \subset P$ （従って $(FG)^P \subset (FG)^Q$）

② $\forall i \in pi\, (FG)^P$ s.t. $Br_P(i)e = Br_P(i) \neq 0$ に対し

$Br_Q(i) f = Br_Q(i)$

Broué − Puig によれば，(P, e) 及び P の subgroup Q を任意に与えると $\exists f$: block of $FC_G(Q)$ があって $(Q, f) \subset (P, e)$ しかも上の definition の $\subset$ は Alperin − Broué で与えたものと一致する。Alperin − Broué の definition は inductive なものであったからやや気持のよいものになっている。もう一度上の definition にもどる。$Br_Q(i)$ は $FC_G(Q)$ で原始巾等元分解される。$Br_Q(i) = \sum e_k$．各 e_k に対し $FC_G(Q)$ の block f_k で $e_k f_k = e_k$ なるものが唯一つある。Broué − Puig は f_k が e_k によらず——それ所か i のとり方 (s.t. $Br_P(i)e = Br_P(i)$) にもよらず e だけで一意的に決まることを主張しているわけである。もちろん ② をみたす f は存在すれば一意的で

あるから存在だけが問題であるが $[P:Q]$ による induction なのでこの"不思議な事実"の中味まではよくわからない。

本報告集で奥山氏が p'-subgroup H に対する $(FG)^H$ について問題提起されているが、$(FG)^P$ についても何か掘り下げるものがあると思われる。

Ⅱ. 多元環の直既約表現論との関係

Roggenkamp によるⅠの結果の証明方法に興味をもって簡単にふれてみた

"R を $\hat{Z}_p$ の不分岐拡大、B を defect 1 の p-block、⊂ RG.

B が e 個の直既約 proj. module をもてば B は $3e$ 個の直既約 lattice をもつ。"

最終的に Graph の表現論に持ちこむわけであるが詳細は Roggenkamp のモントリオール大における Lecture note (市販済) にある。

以上